

תרגיל 1, מבוא לפונקציות מרוכבות

1. תכתוב בצורה קרטזית את המספר הבא

$$\frac{1}{1 + \cos t + i \sin t}$$

כאשר t הינו מספר ממשי לא מהצורה $(2n+1)\pi$, עבור $n \in \mathbb{Z}$.

2. הוכח כי לכל שני מספרים מרוכבים z, w

$$\begin{aligned} |1 - z\bar{w}|^2 + |z + w|^2 &= (1 + |z|^2)(1 + |w|^2), \\ |1 - z\bar{w}|^2 - |z - w|^2 &= (1 - |z|^2)(1 - |w|^2) \end{aligned}$$

תסיק כי עבור $|z| < 1, |w| < 1$ מתקיים

$$\frac{|z - w|}{|1 - z\bar{w}|} < 1.$$

3. הוכח כי עבור $z \in \mathbb{C}$ המקיים $|z| \leq 1$

$$\left| \frac{3 + z^{3n} - |z|}{3 - z^{5n} + z^{4n} - z} \right| \leq \frac{5}{3(1 - |z|)}.$$

רמז: הראה כי מונה קטן מ-5, והמכנה גדול מ- $3(1 - |z|)$.

4. יהיה $z \in \mathbb{C}$. מה הקשר בין קואורדינטות של $\phi(z)$ ושל $\phi(\bar{z})$ תחת העתקה סטריוגרפית?

5. הראה כי כל השורשים של $z^3 + 3z + 5 = 0$, נמצאים מחוץ לעיגול היחידה $\mathbb{D} = \{z \mid |z| \leq 1\}$.

6. תאר את הקבוצות הבאות במישור:

$$(א) \quad z^2 + \bar{z}^2 = 2$$

$$(ב) \quad |z - i| = |z + i|$$

$$(ג) \quad \operatorname{Re}(z(1 - i)) < \sqrt{2}$$

7. תוכיח כי המעגל העובר דרך $a, \frac{1}{a}$ והמעגל עם מרכז 0 ורדיוס 1 מאונכים זה לזה.